Prof. Dr. Catharina Stroppel
Dr. Stefan Schreieder Wintersemester 2016/17

Übungsblatt 6
Lineare Algebra 1

Aufgabe 1. (4 Punkte) *Lineare (Un-)Abhängigkeit im* $\mathbb{R}^3$
Man betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ und entscheide jeweils (mit Begründung), welche der folgenden Vektoren linear unabhängig sind:

(a) $(1, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, -3, 2)$;

(b) $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$;

(c) $(9, 1, 5)$, $(17, 11, 14)$, $(9, 1, 5)$;

(d) $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(6, 9, 12)$;

(e) $(1, 9, 7)$, $(2, 3, 4)$, $(9, 7, 6)$, $(6, 6, 6)$;

(f) $(1, a, 0)$, $(a, 1, 0)$, $(0, a, 1)$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2. (4 Punkte) *Eine Basis aller polynomialen Abbildungen*
Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathrm{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ aller polynomialen Abbildungen $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, welcher in Aufgabe 3(b) auf Übungsblatt 5 besprochen wurde. Für $i \in \mathbb{N}$, betrachten wir die polynomiale Abbildung $p_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^i$. Zeige, dass die Teilmenge

$$\{p_i \mid i \in \mathbb{N}\} \subset \mathrm{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$

eine Basis von $(\mathrm{Pol}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), +, \cdot)$ ist. (Hinweis: Man darf ohne Beweis verwenden, dass ein Polynom $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ mit $a_n \neq 0$ nur endlich viele Nullstellen besitzt.)

Aufgabe 3. (4 Punkte)
Sei K ein Körper und sei $(V, +, \cdot)$ ein K-Vektorraum. Betrachte die folgende Teilmenge X der Potenzmenge von V,

$$X := \{M \subset V \mid M \text{ ist linear unabhängig}\},$$

zusammen mit der Teilordnung $R = \{(N, M) \in X \times X \mid N \subset M\}$. Zeige dass jede total geordnete Teilmente $Y \subset X$ eine obere Schranke in X besitzt.

Aufgabe 4. (4 Punkte) *Unendliche Folgen von Vektoren im* $\mathbb{R}^n$
Für welche natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$, gibt es in dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ eine unendliche Folge von Vektoren $(v_i)_{i \in \mathbb{N}}$, $v_i \in \mathbb{R}^n$, sodass folgende Eigenschaft gilt? Begründe die Antwort.

(a) Für beliebige natürliche Zahlen $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i \neq j$, ist v_i, v_j linear unabhängig.

(b) Für beliebige paarweise verschiedene natürliche Zahlen $i, j, k \in \mathbb{N}$, ist v_i, v_j, v_k linear unabhängig.

Abgabe ist am **Freitag 2. Dezember 2016**, vor (!) der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr.

Allgemeine Bemerkungen:

- **Wichtig:** Die Abgabe ist ab jetzt auch in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte vergessen Sie dabei nicht den **Name und die Nummer des Tutoriums** von jedem Gruppenmitglied auf dem abgegebenen Blatt anzugeben, sodass die Punkte aller Mitglieder richtig eingetragen werden können.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Sätze und Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten (schreied@math.uni-bonn.de).
- Die neuen Übungsblätter können immer Freitags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung heruntergeladen werden: `http://www.math.uni-bonn.de/ag/la2016/LA1.htmpl`
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Freitags **vor der Vorlesung**, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden.

  Die Teilnehmer der Tutorien 5, 6, 7 und 8 werden gebeten, die Übungszettel direkt bei Ihrem Tutor während des Freitags Tutoriums von 8:00-10:00 Uhr abzugeben.
- Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind **mindestens 50%** der Übungspunkte erforderlich.
- Es wird ein **Help Desk** für Fragem zur Vorlesung und den Übungen angeboten. Dort steht Ihnen Montags 15:00–18:00 sowie Donnerstags 14:00–17:00 Uhr jeweils im Raum N1.002 (Endenicher Allee 60, Nebengebäude) ein Student eines höheren Semesters für Fragen zur Verfügung.
- Mehr Details finden Sie auf der oben genannten Homepage der Vorlesung.