# Einführung in die Algebra — Übungsblatt 1

Prof. Dr. Catharina Stroppel, Dr. Martin Palmer-Anghel (Assistent) // Wintersemester 17/18

[**Abgabe**: 19. Oktober 2017, **vor** der Vorlesung, 10:00 – 10:15]

**Aufgabe 1.** (4 Punkte)

(a) Es seien $K$ ein Körper und $n > 1$. Zeigen Sie, dass die Gruppe $GL(n, K)$ nicht abelsch ist.
*Hinweis: Betrachten Sie zuerst den Fall* $n = 2$.

(b) Berechnen Sie das Zentrum $Z(GL(n, K))$ von $GL(n, K)$.

**Aufgabe 2.** (5 Punkte)

Zeigen Sie:

(a) Jede endlich erzeugte Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$ ist zyklisch.

(b) Die Funktion $f\colon (\mathbb{Q}, +) \longrightarrow (\mathbb{C}^\star, \cdot)$ definiert durch $f(x) = e^{2\pi \mathrm{i} x}$ ist ein Gruppenhomomorphismus. Was sind der Kern und das Bild von $f$?

(c) Für jedes $g \in \mathrm{im}(f) < \mathbb{C}^\star$ ist $\langle g \rangle$ endlich.

**Aufgabe 3.** (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}(S_3)$ isomorph zu $S_3$ ist.

**Aufgabe 4.** (4 Punkte)

Die *Diedergruppe* $D_n$ besteht aus alle Isometrien eines regelmäßigen Polygons mit $n$ Kanten.

(a) Aus wie vielen Elementen besteht $D_n$? Ist diese Gruppe abelsch?

(b) Definieren Sie einen Gruppenhomomorphismus $g\colon D_n \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
*Hinweis: Benutzen Sie das Konzept der Orientierung.*

(c) Was ist der Kern von $g$? Definieren Sie einen weiteren Gruppenhomomorphismus $s\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow D_n$ so dass $g \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ gilt.

**Bonusaufgabe 5.** (4 Bonuspunkte)

Die *Oktaedergruppe* Okt besteht aus alle Isometrien eines regelmäßigen Oktaeders.

*(a) Definieren Sie Gruppenhomomorphismen $h\colon \mathrm{Okt} \longrightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $t\colon \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Okt}$ so dass $h \circ t = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$ gilt. Bestimmen Sie das Bild und den Kern von $h$. Wir nennen den Kern $\mathrm{Okt}^+$.

*(b) Bezeichnen wir nun die Flächen des Oktaeders mit den Buchstaben $\{a, b, c, d\}$ so, dass gegenüberliegende Flächen denselben Buchstaben bekommen. Konstruieren Sie einen surjektiven Gruppenhomomorphismus $k\colon \mathrm{Okt}^+ \twoheadrightarrow S_{\{a,b,c,d\}}$.

(c) Bestimmen Sie (durch ein geometrisches Argument) die Anzahl der Elemente der Gruppen Okt und $\mathrm{Okt}^+$.

(d) Folgern Sie, dass $k$ ein Isomorphismus ist.

*NB: Wenn ein Teil einer Aufgabe mit dem Symbol $*$ versehen wird, zeigt dies, dass dieser Teil etwas anspruchsvoller sein sollte.*

**Allgemeine Instruktionen.**

- Die Abgabe ist in Gruppen von zwei oder drei Personen erlaubt; allerdings muss ersichtlich sein, dass jedes Mitglied der Gruppe die Lösung von mindestens einer Aufgabe aufgeschrieben hat. Bitte geben Sie immer Name und Tutorium von jedem Gruppenmitglied an.
- Wenn nicht explizit ausgeschlossen, dürfen Sie Resultate aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, müssen aber dabei immer die Nummer oder den Namen des Satzes, oder aber die Aussage des Satzes, angeben, sodass klar ist, welches Resultat Sie verwenden möchten.
- Die neuen Übungsblätter können immer Donnerstags ab spätestens 12 Uhr von der Homepage der Vorlesung (math.uni-bonn.de/people/palmer/A1.html) heruntergeladen werden.
- Lösungen zu den Übungszettel müssen Donnerstags **vor** der Vorlesung, d.h. 10:00 – 10:15 Uhr, eingereicht werden. Die korrigierten Übungszettel bekommen Sie in Ihrem Tutorium zurück; dort werden auch die Lösungen zu den Aufgaben besprochen.
- Für die Zulassung zur Klausur sind mindestens 50% der Übungspunkte erforderlich.
- Bei Fragen zu diesem Übungszettel, wenden Sie sich bitte an Ihren Tutor, oder an den Assistenten. Mehr Details zur Vorlesung finden Sie auf der oben genannten Homepage.