MUT-Mathematik-Braunschweig 15.11.2006 - IQB, Berlin 08.09.2006

Alexander Wynands

Thema:
Intelligentes Üben im Mathematikunterricht - Ziele, Methoden und Beispiele nicht nur für leistungsstarke Schüler in der Sekundarstufe I.

1. Einleitung - Ziele

Bezug zu aktuellen (eigenen) Arbeiten:
Herausgeber und Autor von Schulbüchern für HS / RS
Lehrerausbildung S II / I
PISA-Ergebnisse und Aufgabenmaterial zu KMK-Standards für den MU
Literatur:
MAßSTAB / Faktor, WELT der ZAHL / Mathe aktiv
Aebli - Comenius – Weinert - Winter – Wittmann/Müller – Wynands ...

Intelligentes Üben verfolgt die Ziele:
* Festigen von Routinen in inner- und außermathematischen Anwendungen,
* Entdecken mathematischer Beziehungen und Vernetzen von (Stoff-)Gebieten und oder allgemeiner Regeln,
* Kommunikation über Erfahrungen und Entdeckungen mit mathematischen Argumenten in adäquater Form mit mathematischen Sprachmitteln.

Methoden und Beispiel hierzu findet man nicht erst seit PISA 2000. Spezielle Ergebnisse von PISA-Studien fordern aber ein verstärktes Bemühen auch um (vermeintlich) leistungsschwache Schüler der Sekundarstufe I.

2. Wozu intelligentes Üben im Mathematikunterricht?

Die Frage nach sinnvollem Unterricht und speziell nach Sinn und Umfang des Übens in der Schule scheint so alt zu sein wie die Schule selbst. Heinrich Winter [Winter, 1991, S. 77] zitiert Johann Amos Comenius (oder Komenzki, 1592-1670; Große Didaktik, herausgegeben von A. Flitner, Pädagogische Texte, Klett-Cotta 1982), der zwei Gründe für den kärglichen Erfolg der Schulen nennt: „die Schulen geben sich zu sehr mit ´Nebensächlichem und Wertlosem ab´ und der Unterricht trägt nicht der Tatsache Rechnung, dass die Menschen vergesslich sind, vielmehr beim Lesen und Hören ´Wasser mit einem Siebe` schöpfen."

Damit mehr Sinn und Verstand den Mathematikunterricht bestimmen und nicht Kompetenzen wie Wasser mit einem löchrigen Sieb geschöpft werden, fordern wir – z. B. mit Comenius, Winter, Wittmann [Wittmann, 1982], Neubrand [Neubrand, 1997] – intensives und häufiges Üben, das sich nicht nur auf Hören und Lesen beschränkt, sondern eigenes Tun bewirkt, allein oder in Partnerarbeit. Für unverzichtbar und gar nicht nebensächlich und wertlos halten wir das Üben und Wiederholen von Basisfertigkeiten. Hierzu gehören Kopfrechenfertigkeiten, Runden auf 10er-Stufenzahlen (Zehnerpotenzen) und Rechnen mit diesen Zehnerpotenzen, Kopfgeometrie, Verstehen „einfacher" Terme, Verständnis für „Größen" (Maßeinheiten und Umwandlungsfaktoren) und Fertigkeiten (anti-) proportionale Zuordnungsaufgaben zu lösen. Die **Expertise [Neubrand, 1997] zur „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichts" betont völlig zu Recht, dass „in der Sekundarstufe**

I die Verfahren des so genannten bürgerlichen Rechnens unverzichtbar" sind. Wenn darauf nicht ausreichend geachtet wird, fehlen häufig notwendige, entlastende Routinen, die in „höheren Anforderungsbereichen" das Erkennen von Zusammenhängen und Verallgemeinerungen erleichtern und Reflexionen, Begründungen und Beweise unterstützen können.

Den Sinn solchen „reinen" oder „einfachen" Übens und Wachhaltens von Basisfertigkeiten betont z.B. **Aebli in seinem Buch „Zwölf Grundformen des Lehrens" [Aebli, 1991, S. 242]: Solche „Übung strebt die Bildung von Automatismen an" es sollen „rasche, sichere aber stereotype Reaktionen"** trainiert werden. Aebli begründet den daraus entstehenden Nutzen in seinem Buch (S. 182-195) damit, dass nur durch diese Automatisierung die gedankliche Beweglichkeit und Übersicht geschaffen wird, so dass „neue Operationen in höhere Zusammenhänge integriert werden können". Es soll auch nicht übersehen werden, dass es **für manche Schüler ein Erfolgserlebnis und emotional wichtig ist, Routinen sicher, schnell und erfolgreich ausführen zu können**.

Allerdings kann nach Aebli die „reine Übung" den Schüler nicht befähigen, das in einer bestimmten Situation erworbene und in ähnlichen Situationen geübte Wissen auf neue Situationen zu übertragen. Von „intelligentem Üben" möchten wir sprechen, wenn nicht nur Routinen als Selbstzweck gepflegt werden, sondern wenn dabei allgemeine Begriffe „begreifbarer" gemacht, Stoffgebiete vernetzt, neue Erkenntnisse entdeckt und begründende Kommunikation angestoßen werden. Übungen erhalten damit einen hohen Stellenwert im Mathematikunterricht, wenn sie nicht nur auf stures Repetieren von Schemata ausgerichtet sind, die Langeweile erzeugen. Heinrich Winter **[Winter, 1991, S. 78-79] weist darauf hin, dass Üben und entdeckendes Lernen nicht entgegen sondern gleichgerichtet sein können:**
„Üben und Entdecken haben auf den ersten Blick und nach landläufiger Meinung nicht viel miteinander zu tun. Üben ist vorwiegend negativ belegt: es ist mühselig... langweilig, immer wieder dasselbe... Entdecken wird entsprechend hoch positiv bewertet ..." Winter schreibt weiter: **„Üben ist in zweierlei Hinsicht dem entdeckenden Unterricht sogar inhärent: Einmal stellen das Erkunden eines Feldes und das Suchen einer Lösung Formen der intensiven immanenten Wiederholung, der Reaktivierung, der Durchmusterung von Wissen dar. Umgekehrt haben Entdeckungen verfügbares Wissen und abrufbare Fertigkeiten zur Voraussetzung, Lernen ist immer nur Weiterlernen; Entdeckungen sind umso wahrscheinlicher, je größer und besser organisiert das fachliche Vorwissen ist**. Zum anderen ist eine durch Üben stabilisierte Leistungsfähigkeit in emotionaler Hinsicht notwendig. Theoretische **Neugier und der Mut zu Vermutungen lassen sich wohl nur erhalten und befördern, wenn auch Lernzuwächse für den Schüler sichtbar werden, wenn er das Gefühl hat, etwas zu können, und zwar sicher, geläufig und willentlich herbeiführbar."**

Basisfertigkeiten sind unverzichtbarer Bestandteil eines intelligenten Wissens und Könnens. Intelligentes Üben kann „intelligentes Wissen" im Sinne Weinerts aufbauen und wach halten. **Weinert [Weinert, 2000] fordert den Aufbau intelligenten Wissens als eines von 6 fundamentalen Bildungszielen:**
"Intelligentes Wissen besitzen heißt also, ein Wissen besitzen, das bedeutungshaltig und sinnhaft ist. Gut verstandenes Wissen ist ein Wissen, das nicht "eingekapselt" ist, nicht tot im Gedächtnis liegt, nicht "verlötet" ist mit der Situation, in der es erworben wurde, sondern das lebendig, flexibel nutzbar, eben intelligent ist."

Die hier folgenden Beispiele konkretisieren alte Forderungen u. a. von **E. Wittmann nach Aufgaben, Problemen und Problemfeldern zum „aktiv-entdeckenden Lernen" [Wittmann, 1982] als Kern für den konkreten Mathematikunterricht. Intelligentes Üben in der Sekundarstufe I will eigenständiges Denken fördern und die Zielrichtung des „produktiven Übens" von Wittmann und Müller [Wittmann / Müller, 1992] aufgreifen** und weiterführen auf der Basis von Grundfertigkeiten des Zählens und Rechnens, von Form- und Maßerfassung. Die angeführten Beispiele vernetzen Zahlen, Formen und Maße. Sie fordern auf zum Weiterdenken, um Muster oder Regeln zu erkennen und diese nach Möglichkeit zu begründen und darüber mit anderen zu sprechen. Zu diesen Zielrichtungen vgl. auch R. Bruder [Bruder, 2000, S. 12 ff], T. Leuders [Leuders, 2005] und A. Wynands [Wynands, 2005, S. 47-51].

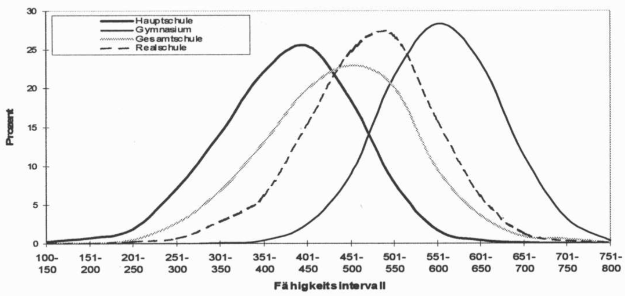
3. Intelligentes Übungsmaterial für alle Schülerinnen und Schüler anbieten!

Die Leistungbereiche in den deutschen Schulformen zeigen eine starke Überlappung. Deshalb sind herausfordernde Übungen auch für Haupt- und Gesamtschüler förderlich.
Daten hierzu aus PISA 2000 / 2003:

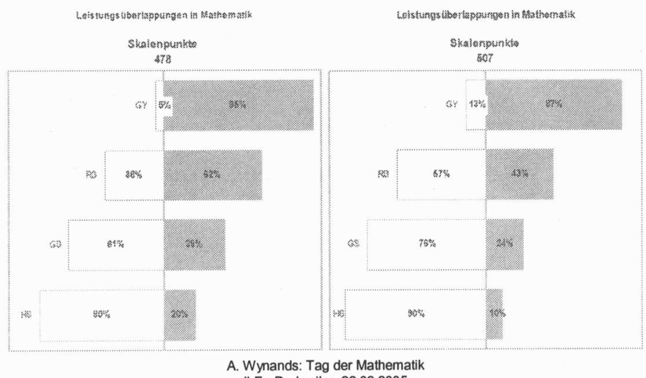
Überlappung der PISA2000-Ergebnisse: HS, GS, RS und GY

vgl. Baumert (2001), S. 180

Mathematische Kompetenz nach Bildungsgang

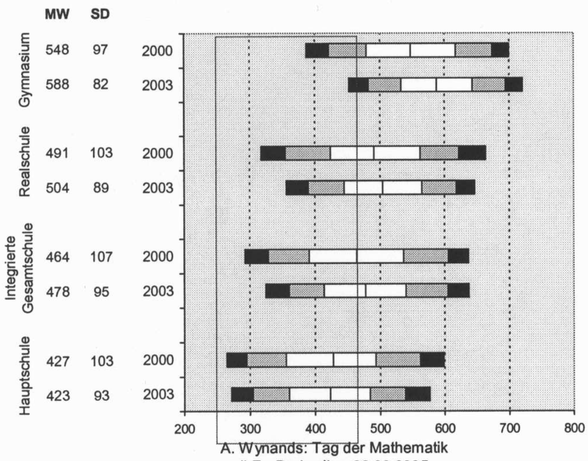


Definition von Überlappungsgrenzen



A. Wynands: Tag der Mathematik
ILF - Dudweiler, 28.09.2005

Perzentilvergleich in PISA 2000 und 2003 nach Schulformen
„Raum und Form" Pisa 2003, Abb. 2.21 S. 88



A. Wynands: Tag der Mathematik
ILF - Dudweiler, 28.09.2005

Intelligentes Üben ist Teil eines „verständnisvollen" Lernens.

Verständnisvolles Lernen - PISA 2003, Abb10.8 S. 318

- ...ist ein aktiver, individueller Konstruktionsprozess, in dem Wissensstrukturen verändert, erweitert, vernetzt, hierarchisch geordnet oder neu generiert werden. Entscheidend ist die aktive mentale Verarbeitung, die sich in der handelnden Auseinandersetzung ....vollzieht.
- ... ist sinnstiftend, indem neue Zusammenhänge erschlossen werden, die Wissen organisieren und ordnen. Dazu gehört, dass der Gegenstand ein Mindestmaß an intellektueller und/oder praktischer Bedeutung besitzt.
- ... ist von den individuellen kognitiven Voraussetzungen, vor allem aber vom bereichsspezifischen Vorwissen abhängig.

A. Wynands: Tag der Mathematik
ILF - Dudweiler, 28.09.2005

- Verständnisvolles Lernen erfolgt trotz aller Systematik stets auch situiert und kontextuiert. Wissen wird in der Regel in sozialen Kontexten erworben....
- Verständnisvolles Lernen wird durch Motivation und metakognitive Prozesse (z.B. Planung, Kontrolle, Bewertung) reguliert.
- Verständnisvolles Lernen wird durch kognitive Entlastungsmechanismen unterstützt. Dazu gehören die durch multiple Repräsentation förderbare Herausbildung informationsreicher Wisseneinheiten, die als Ganzes erinnert und abgerufen werden können (Chunks) sowie die Automatisierung von Handlungsabläufen und Denkvorgängen.

A. Wynands: Tag der Mathematik
ILF - Dudweiler, 28.09.2005

4. Beispiele für „Reines" Üben und Basiswissen

Es ist nicht im Sinne der Bildungsstandards, auf die Einübung von Automatismen zu verzichten - wohl aber, den oft sehr hohen Anteil eines kalkülorientierten Arbeitens zu reduzieren oder in neue Bahnen zu lenken. Zusammenhanglose Rechenaufgaben könnten vermehrt durch Sequenzen von Aufgaben ersetzt werden, die nicht nur Rechenfertigkeit trainieren sondern auch noch den Blick auf Zusammenhänge, Gesetzmäßigkeiten, Regeln, Methoden oder Begriffe richten.

Zunächst seien Beispiele für "kleine, einfache" Aufgaben genannt zum Üben spezieller Basiskompetenzen - z. B. Kopfrechnen mit einziffrigen Zahlen und Zehnerpotenzen, Überschlagsrechnen, Maßumwandlungen – vgl. hierzu [Wynands / Neubrand, 2003]. Sie sollten häufig(er) im Mathematikunterricht bei „mündlichen" Konzentrationsübungen und Klassenarbeiten zur Wiederholung von weiter zurückliegenden Stoffen Beachtung finden.

Auch diese Aufgaben sind geeignet, vernetztes Denken auszubilden. Bei allen guten Ideen und Wünschen darf aber besonders in der Hauptschule keine Überforderung der Schülerinnen und Schüler erfolgen. Frust und kontraproduktive Ängste wären absehbare Folgen. Deutlich gesagt sei aber, dass sich die hier angegebenen Beispiele aus einem Unterrichtswerk für die **Hauptschule [Welt der Zahl, 2001-2004] nicht nur an die ca. 30% leistungsstarken** Schülerinnen und Schüler in der Hauptschule richten, deren mathematische Fähigkeiten derjenigen in der Realschule oder im Gymnasium entspricht. Manche Schülerinnen und Schüler werden gerade durch herausfordernde Aufgaben gefördert.

Zum Wachhalten technischer Fertigkeiten seien hier nur wenige Beispiele für die **Jahrgangsstufen 5/6 genannt, die sich auf Terme und "Größen" beziehen.**

1. *Rechne aus, ordne die Ergebnisse der Größe nach, beginne mit der kleinsten Zahl:*
   4+2 3   (4+2)* 3   4* (2+3)   4: (2-1)   4:2 - 1   4-2* 0   (4+2:1)* 0*
2. *Welche Größenangaben gehören zu Längen, welche zu Flächen? Sortiere und ordne:*
   0,6 m   0,1 m²   50 mm   80 cm²   10 cm²   1 dm²   ½ km   66 cm
   Welche konkreten Gegenstände sind so groß? Gib Beispiele hierzu an.
3. *Arbeite mit diesen Längenangaben:*
   305m, 905m, 195m, 95m, 550m, 650m, 450m, 915m, 805m, 85m.
   a) Zwei Längen sollen zusammen mindestens ½ km (höchstens 1,5 km) ergeben.
   Schreibe alle passenden Längenpaare auf.
   b) Wie lang sind x gleiche Stäbe, die zusammen so lang sind wie alle hier angegebenen Längen zusammen? Bestimme die Stablängen für verschiedene x-Werte.
4. *Ergänze Faktoren so, dass eine richtige Gleichung entsteht.*
   *a) 10 * 6 = 5 * _ * _   b) 100 * 15 = 25 * _ * 3 * _   c) 9 * 40 = _ * _ * _ * _*

In den nachfolgenden Beispielen ist das Ausrechnen der angegebenen Aufgaben „reine Pflichtübung", das Erkennen des Aufgabenmusters eine „Kür" oder ein Anreiz für Entdeckungen und deren Begründung eine Herausforderung:

5. *Rechne und kontrolliere. Ergänze ähnliche Gleichungen.*
   *a) 9 * 11 = 10 * 10 - 1;   19 * 21 = 20 * 20 - 1;   29 * 31 = 30 * 30 – 1 ...*
   *b) 9*1-1= 8   9*21-1 = 188   9*321-1 = 2888   9*4321- ....*

6. *a) Schau dir die Serie von Gleichungen an und kontrolliere.*   *1 = 1*
   b) Setze die Serie fort um drei weitere Gleichungen.   *4 - 1 = 1 + 2*

c) Wie heißt die 10. Gleichung? Ist sie richtig? $\quad 9 - 4 + 1 = 1 + 2 + 3$

d) Zeichne für beide Seiten der Gleichungen $\quad 16 - 9 + 4 - 1 = 1 + 2 + 3 + 4$

Punktmuster. Tipp: links stehen „Quadrat“-Zahlen, rechts „Dreieckszahl

7. Kontrollier, ergänze und prüfe weitere ähnliche Gleichungen.
$(1+2)^2 = 1^3 + 2^3$, $\quad (1+2+3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$, $\quad (1+2+3+4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$, ...

Mit diesen Aufgaben wird ein wichtiges Denkmuster für strategisches Arbeiten geübt. Wer frühzeitig den Blick für rückwärtsbezogenes (rekursives) und nach vorne orientiertes (induktives oder iteratives) Arbeiten schärft, kann leistungsstarken Schülern (ab der 7. Klasse?) rekursives und iteratives Arbeiten nahe bringen und die Beweismethode der „vollständigen Induktion“ vor Augen führen. Wichtig dabei ist es, zunächst statt mit Variablen mit „auffälligen“ oder „signifikanten“ konstanten Zahlen zu arbeiten. Im Rückblick werden dann gegebenenfalls die „signifikanten“ Zahlen, die man auch „rot“ schreiben kann, durch Variablen ersetzt und ein allgemeines Gesetz oder eine Regel formuliert. Man vergleiche hierzu den Beweis für die vorstehende Aufgabensequenz als Vorschlag für ein Unterrichtsgespräch zum geführten Entdecken in [Wynands, 2005].

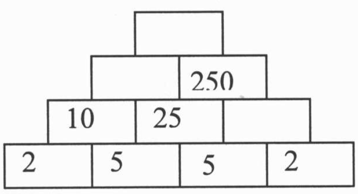
5. **Erprobte Aufgabenbeispiele für entdeckungs-offenes Üben**

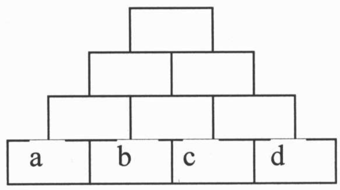
Die nachfolgenden Aufgabenbeispiele wurden in verschiedenen Schulformen und Jahrgangsstufen erprobt. Wir betrachten die Zuordnung der Beispiele zu den Bildungsstandards, gelungene Lösungsideen und typische Fehler; „Lösungshäufigkeiten“ sind hier wegen der geringen Probandenanzahlen zweitrangig. Alle Aufgaben können zum entdeckenden Lernen und intelligenten Üben oder auch zum Testen eingesetzt werden. Partnerarbeit ist ebenso wie Einzelarbeit möglich und meistens erwünscht. Bei der Erprobung der vier ersten Aufgaben erwies sich Partnerarbeit bei vielen Probanden als vorteilhaft. Besonders Schüler mit mittleren bis guten mathematischen Leistungen profitierten davon, dass Lösungsideen ausgetauscht, verworfen oder weiter verfolgt werden konnten.

5.1 Zahlenmauern **zum symbolisch, technisch, formalen Arbeiten**

Die Zahlenmauern werden so gebildet, dass in den Stein, der über zwei Steinen liegt, das Produkt der dortigen Zahlen geschrieben wird.

a) Fülle die (linke) Zahlenmauer vollständig aus.





b) Die Zahl, die im oberen Stein erscheint, heißt Zielzahl. Schreibe auf, wie du die Zielzahl für die rechte Zahlenmauer berechnest, ohne die anderen Zahlen zu berechnen.

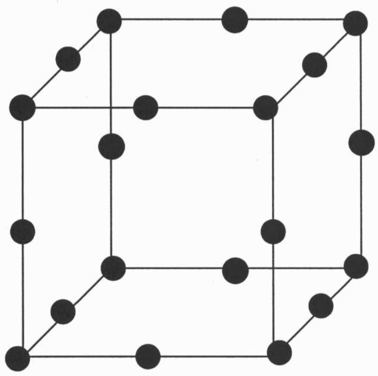
c) Die Zielzahl ist 100 000 000, in der unteren Reihe sind alle Zahlen gleich. Wie heißt die Zahl in der unteren Reihe?

Anmerkungen:

Diese Aufgaben zur Leitidee L1 (Zahl) erfordern die Kompetenzen K4 (math. Darstellungen) und K5 (umgehen mit mathematischen Symbolen, technischen Elementen). Teil a) erfordert Basisfertigkeiten im Anforderungsbereich I, wie sie im Abschnitt 2 genannt sind, b) und c) verlangen das Erkennen von Zusammenhängen, Potenzschreibweise und „zielgerichtete Probierstrategie“ oder Rückwärtsrechnen (Anforderungsbereich II).
Die Aufgabentypen a) und c) sind mit „Summensteinen“ statt „Produktsteinen“ schon in der Grundschule sinnvoll. Addition/Subtraktion und Multiplikation/Division im Bereich der natürlichen Zahlen sind und bleiben „gängige“ Aufgaben im Mathematikunterricht. In b) könnten auch mehrgliedrige Terme in der untersten Reihe stehen, womit dann vielfältige Übungen zu Termnotationen entstehen. Partnerarbeit bietet sich an: P1 stellt Aufgaben, die P2 löst und ggfl. seine Lösung gegen Einwände von P1 verteidigt.

5.2 Verbindungsstäbe zum Modellieren, Problemlösen und Kommunizieren

Aus Kugeln und Verbindungsstäben werden - wie in der Abbildung dargestellt - Würfel gebaut. Bei drei Kugeln auf einer Kante ergibt sich eine Gesamtzahl von 20 Kugeln.
a) Bestimme die Gesamtzahl der Kugeln für zwei, bzw. vier Kugeln auf einer Kante und vervollständige die Tabelle.



Kugelanzahl auf einer Kante	*2*	*3*	*4*
Gesamtzahl der Kugeln		*20*	

b) Wie viele Kugeln werden benötigt, wenn 100 Kugeln auf einer Kante befestigt sind. Schreibe auf, wie du rechnest.

Anmerkungen:
Ausgehend von Einführungsübungen in a) soll in b) eine Zählstrategie entwickelt und durch einen Rechenweg (Term) aufgeschrieben werden. Der Term zeigt, ob man die mathematische Sprache mit Vorrangregeln (für Klammern und Punkt-vor-Strich-Rechnung) beherrscht. Solche Übungen mit Punktmustern können schon in der Grundschule eingesetzt und häufig in der Sekundarstufe I zur Erarbeitung von Termnotationen, Entdeckung von Symmetrien in der Geometrie und deren arithmetische Folgerungen, d.h. zur Vernetzung von Arithmetik / Algebra mit Geometrie gepflegt werden - vgl. [Wynands, 2005]. Zur Überprüfung von Leistungsfähigkeiten in allen Kompetenzen bieten sich derartige Aufgaben an, speziell zum Modellieren (K3), Problemlösen (K4) und Kommunizieren (K6), da der Proband seinen Lösungsweg in b) dokumentieren soll.

Beispiele für Lösungsprotokolle:

(1) 100*4 = 400 , 89 *8 = 784 also K = 400 + 784 = 1184,
(2) K = 8 + 12*(100 -2), (3) K = 12*100 – 16, (4) K = 4*100 + 8*98,
(5) K = (200 +196)*2 + 2*100 – 8, (6) 100 + 99+99+98+99+99+98+99+99+98+98+98.

Verblüfft hat uns die folgende Rechnung, bei der in der Tabelle für 4 Kugeln je Kante schon das Ergebnis 32 stand. Es folgte eine Kette von (rekursiv richtigen) Rechenschritten:

5-- 32+12 = 44; 6-- 44+12 = 56; 7-- 56+12 = 68; 8-- 68+12 = 80;
9-- 80+12 = 92; 10-- 92+12 = 104; ..... (hier war eine Lücke, dann folgte das Ergebnis)
90*12 + 104 =1184.
Bei der Gesamtzahl 1184 für 100 Kugeln je Kante wurde offensichtlich das Zwischenergebnis von 104 Kugeln für 10 auf jeder Kante strategisch klug genutzt.

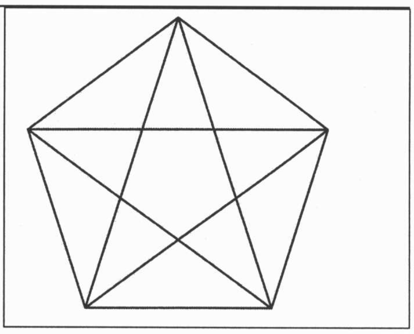
Der Weg, d. h. die Modellierung, nicht das Zahlenergebnis (1.184) ist das Ziel dieser Übung! Die Analyse typischer falscher Rechenwege ermöglicht eine Therapie für falsche Modellierungen:

(1) K=12*98; (2) K= 12*100 – 6*8; (3) 400 pro Fläche, 6*400 = 2400; (4) 4*100 + 4*98; (5)11*99 + 100; (6) 12*100 – 8; (7) 10*100; 8*100 und einen „Dreisatz“: (8) 3 Kugeln – 20; 1 Kugel – 20/6; 100 Kugeln – 20/6 * 100 = 666,6.

5.3 Diagonalen zum Problemlösen und Argumentieren

In das Fünfeck sind alle 5 Diagonalen eingezeichnet. Ergänze in der folgenden Tabelle die Anzahl der Diagonalen der angegebenen konvexen Vielecke:

Drei eck	*Vier eck*	*Fünf eck*	*Sech seck*	*Sieben eck*	*Acht eck*	*Zwölfe ck*
		5				



Beschreibe, wie du die Anzahl der Diagonalen im Zwölfeck gefunden hast.

Anmerkungen:
Diese Aufgabe vernetzt die Leitideen Zahl (L1) und Raum und Form (L3). Als Einstieg in die „Formkunde“ ebener (regelmäßiger) Vielecke ist sie ebenso geeignet wie zur Einübung systematischer Zählverfahren, speziell der Entwicklung rekursiver oder iterativer Methoden. Als Testaufgabe ist das Problem-Beispiel fast zu „schade“; es eignet sich viel besser zum eigenständigen Entdecken und Begründen, wofür man in der Klasse mehr Zeit lassen und Partnerarbeit ermöglichen sollte. Eine Lösungsformel, mit der man schnell die gesuchte Anzahl von Diagonalen berechnen kann, sollte ein lohnendes Ziel für weiterführende Überlegungen sein. Die Schwerpunkte liegen hier bei K2 (Problemlösen) und K1 (Argumentieren). Die Anzahl aller Diagonalen im Zwölfeck zu bestimmen, erfordert eine Strategie. Diese kann sich zwar auf vorangehende einfachere Fälle stützen, bedarf aber einer Reflexion der gelösten Fälle und einer Verallgemeinerung. Der letzte Teil der Aufgabe erfordert deshalb das Arbeiten auf dem Anforderungsniveau III. Die Aufgabe kann dem Problemkreis „2 aus n möglichen herausgreifen“ zugeordnet werden. Schülergemäße Einkleidungen hierzu sind: „Wie viel Spiele gibt es, wenn jeweils 2 von n (18 in der Fußball-Bundesliga) Mannschaften gegeneinander spielen sollen?“ oder „Jeder schüttelt jedem die Hand ...“. Die Modellierung solcher Probleme kann zu grafischen Darstellungen in n-Ecken führen.

Erfahrungen / Ergebnisse:

In den beiden o. g. **8.Gymnasialklassen mit 40 Probanden füllten die Tabelle bis zum Achteck 19 Probanden richtig aus. Die Anzahl (54) der Diagonalen im Zwölfeck fanden 9 Probanden des Tests.**

Vier richtige Lösungen waren sehr klar strukturiert, eine davon zeigt das nebenstehende Arbeitsprotokoll:

5eck = 5 = 2 + 2 +1
6eck = 9 = 3 + 3 + 2 + 1
7eck = 14 = 4 + 4 + 3 + 2 + 1
8eck = 20 = 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
.
.
.
12eck = 54 = 9 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3+2+1

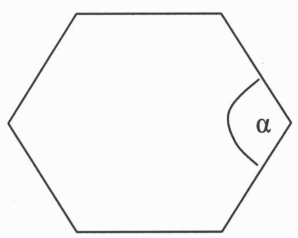
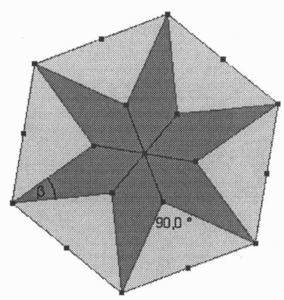
Das erste Gleichheitszeichen im Lösungsprotokoll ist zwar falsch gewählt, sein Sinn aber verständlich; es wurde als „verzeihlicher“ Fehler akzeptiert.

Ganz anders arbeiteten und notierten zwei weitere Probanden. Die Tabelle der Aufgabenstellung wurde „lückenlos“ bis zum Zwölfeck um eine Zeile ergänzt:

3-	4-	5-	6-	7-	8-	9-	10-	11-	12-Eck	
0	2	5	9	14	20	27	35	44	54	(Anzahl der Diagonalen)
	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9	+10	(so viele kommen jeweils hinzu)

Ein anderer Lösungsweg wurde so notiert: 11+10+9+8+ … +2+1 – 12 = 54.
Zu allen Lösungen und Versuche wurden Handskizzen angefertigt.

5. 4 Sechsecke zum Problemlösen und Argumentieren

	
a) *Du erkennst 6 gleiche Innenwinkel α. Finde heraus, wie groß jeder von ihnen ist. Begründe dein Vorgehen.*	*b) Aus dem Sechseck werden wie in der Zeichnung rechtwinklige Dreiecke ausgeschnitten. Übrig bleibt ein Stern. Zeichne dieses Bild! Wie kannst du die rechtwinkligen Dreiecke konstruieren? Wie groß ist der Winkel β an der Spitze eines Sterns?*

Anmerkungen:

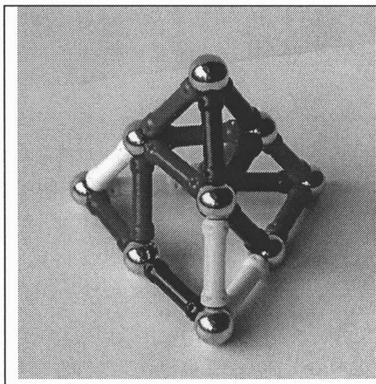
Auch diese Aufgabe dient mehr einer auf Entdeckung gerichteten Übung als Testzwecken. Hauptsächlich werden die Kompetenzen K1 (Argumentieren) und K2 (Problemlösen) gefördert. Die Aufgabe ist gedacht ab Klasse 7 im Anschluss an die Behandlung einfacher Winkelsätze (Winkelsumme im Dreieck, Basiswinkelsatz). Dort dient sie zur Vertiefung und Vernetzung. Teil a) bereitet die Bearbeitung von Teilaufgabe b) vor. In sehr guten Klassen könnte man also auf a) verzichten. Beziehungen zwischen Winkeln im regelmäßigen Sechseck müssen entdeckt werden. Die Konstruktion des Sterns ist auf verschiedene Weisen möglich. Dieser Teil von b) ist also für Konstruktionsmethoden „offen“ – mit Thalessatz, mit

Mittelsenkrechten zu den Sechseckseiten, mit Dreieckskonstruktion (w,s,w) = (45°, Seite, 45°).

5.5 Pyramidenbau zum Modellieren, Argumentieren und Kommunizieren

- Beispiel für eine Aufgabensequenz mit zunehmender Komplexität -

Mit einem Magnetspiel sollen Pyramiden gebaut werden. Die Grundfläche und die Seitenflächen sind gleichseitige Dreiecke. (Solche Pyramiden heißen auch Tetraeder.)
Die farbigen Stücke sind Magnete; zwischen zwei Magneten befindet sich immer eine Kugel.
Ein Magnet ist 27 mm lang, eine Kugel hat einen Durchmesser von 13 mm.
Gebaut wird zuerst die Spitze aus 4 Kugeln und 6 Magneten; von da aus wird die 1. Etage nach unten angebaut. Damit der Bau stabiler wird, wird an jede Kugel, die sich innerhalb einer Kante befindet, ein Magnet als Querstrebe angesetzt.



a) *Untersuche, wie viele Magnete und wie viele Kugeln benötigt werden, um die abgebildete Pyramide zu bauen.*

b) *Monika sagt: Die Kantenlänge dieser abgebildeten Pyramide ist 8 cm. Wie kommt sie zu dieser Antwort?*

c) *Berechne mit Monikas Wert das Volumen der Pyramide.*

d) *Wie viele kleine Dreiecke und wie viele Parallelogramme sind außen auf der abgebildeten Pyramide zu finden?*

e) *Wie viele Magnete werden benötigt, um dieser Pyramide eine weitere Etage anzubauen?*

f) *Monika hat in ihrem Magnetspiel 80 Magnete und beliebig viele Kugeln. Welche Kantenlänge hat die größte Pyramide, die sie damit bauen kann?*

g) *Erkennst du ein System für die Anzahl der Magnete und der Kugeln in der n-ten Etage? Notiere auch einen Term, mit dem du die Anzahl der Magnete und die Anzahl der Kugeln bestimmen kannst.*

Erfahrungen:
Zu a) geben wir eine Schülerlösung, die ein gutes Denk-Protokoll darstellt. Man erkennt die Zählstrategie, die in den Teilaufgaben e) bis g) sehr hilfreich sein kann.
Diese Aufgabe konnten fast alle Schüler lösen. Einige Ergebnisse wurden aber nicht kommentiert, so dass unklar blieb, ob eine Strategie vom Probanden verwendet wurde.

Pyramidenbau

1. Etage: 1 Kugel, 0 Magnete
2. Etage: 3 Kugeln, 6 Magnete
3. Etage: 6 Kugeln, 12 Magnete

Kugeln insgesamt: 1 + 3 + 6 = 10
Magneten insgesamt: 6 + 12 = 18

Zu b)

Damit folg: $V = \frac{1}{3} \cdot 16\sqrt{3} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot 8 = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot 128 \approx 60{,}34$.

Das richtige Ergebnis von ca. 60 cm^3 erhielt etwa nur recht wenige in der 9. Gymnasialklasse. Einige Schüler kamen zu falschen Lösungen, weil sie falsche Formeln verwandten, z.B. $V = \frac{1}{3}\pi r^3$ oder $V = \frac{1}{3} g^2 h$. Manche versuchten die Volumenformel wie oben herzuleiten, setzten aber die Körperhöhe H gleich der Dreieckshöhe h.

Zu c) Schätze mit Monikas Wert (für die Kantenlänge) das Volumen der Pyramide.
Brauchbare Schätzungen:
(1) Ungefähr Würfelvolumen: 3 x 3 x 3 cm^3 oder 4 x 4 x 4 cm^3 oder 5 x 5 x 5 cm^3
(2) V ist kleiner als ein Drittel des Volumens der quadratischen Pyramide mit Grundfläche (8*8:2) cm^2 und Höhe 8 cm , d.h. ca. 85 cm^2.

Zu d) Die meisten Probanden erhielten durch „Hinschauen" und Zählen richtige Lösungen. Beispiel-Lösungen:
* In der Spitze sind 3 Dreiecke, in der ersten Etage sind es 3 Dreiecke und 3 Parallelogramme. Also sind es zusammen 6 Dreiecke und 3 Parallelogramme.

* Auf jeder Seite findet man 2 Dreiecke und ein Parallelogramm. Insgesamt gibt es **6** Dreiecke und **3** Parallelogramme.

Zu e) Schülerlösungen:
* 3 (Kanten) + 3*3 (Grundfläche) + 3*2 (Verstrebungen) → 18 Magnete und 9 Kugeln.
* 7 + 6 + 5 = 18 Magnete; oder: * 12 + 3 · 2 = 12 + 6 = 18; oder so:
* 12 Magnete für die Grundfläche, 6 für die Querstreben

Dieser Aufgabenteil ist abstrakter; es wird nicht mehr gebaut, die Handlung ist „vorgestellt" oder „verinnerlicht". Die gebaute Pyramide lässt sich aber noch als Zählhilfe verwenden. Die alte Zählstrategie kann jetzt weiter verwendet werden, falls sie an den einfachen Beispielen aufgebaut wurde. Die Lösung gelang nur etwa jedem zweiten Schüler.

Zu f): In der 3. Etage gibt es 3 + 3*4 + 3*3 = 24 Magnete und 12 Kugeln. Insgesamt sind es für diese größere Pyramide 60 Magnete und 31 Kugeln. In der 4. Etage: 3 + 3*5 + 3*4 = 30 Magnete und 15 Kugeln, insgesamt 90 Magnete und 46 Kugeln. Monika kann die Spitze plus drei Etagen bauen. Zu einer der untersten Kanten gehören 4 Magnete und 4 Kugeln. Die Kantenlänge beträgt 4 · 27 mm + 4 · 13 mm = 16 cm.

f) Etage	Kugeln	Magn
0	1	0
1	3	6
2	6	12
3	9	18
4	12	24
gesamt	31	60

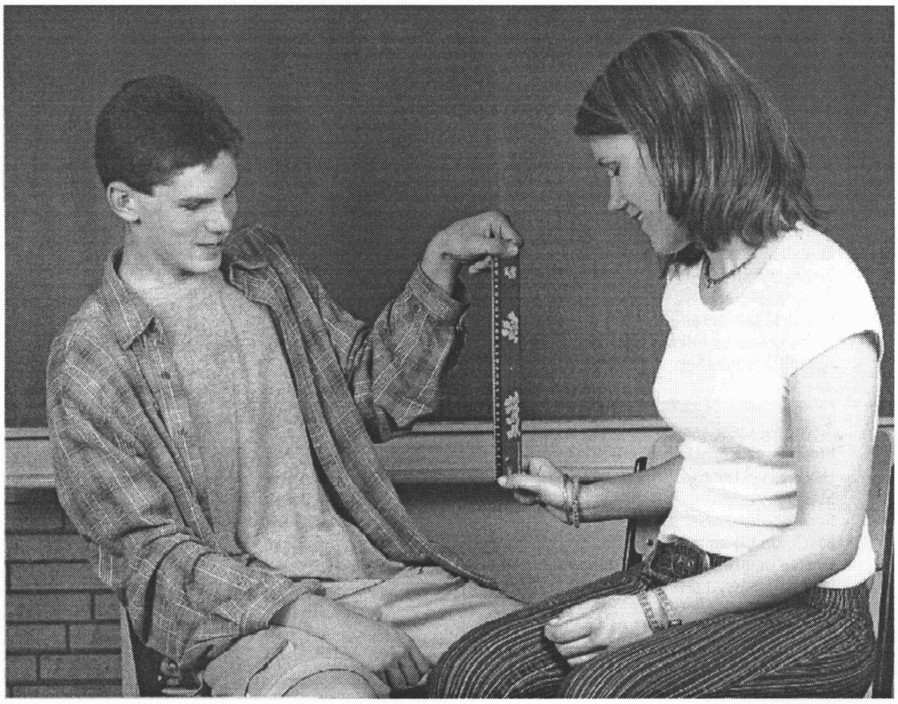
6. Offene Situationen – Einstieg in … oder Anwendungs-Ausstieg?

6.1 Coils

Beantworten „außermathematischer“ Fragen:
Realität →mathe. Modell → Mathematik→…

A. Wynands: Tag der Mathematik
ILF - Dudweiler, 28.09.2005

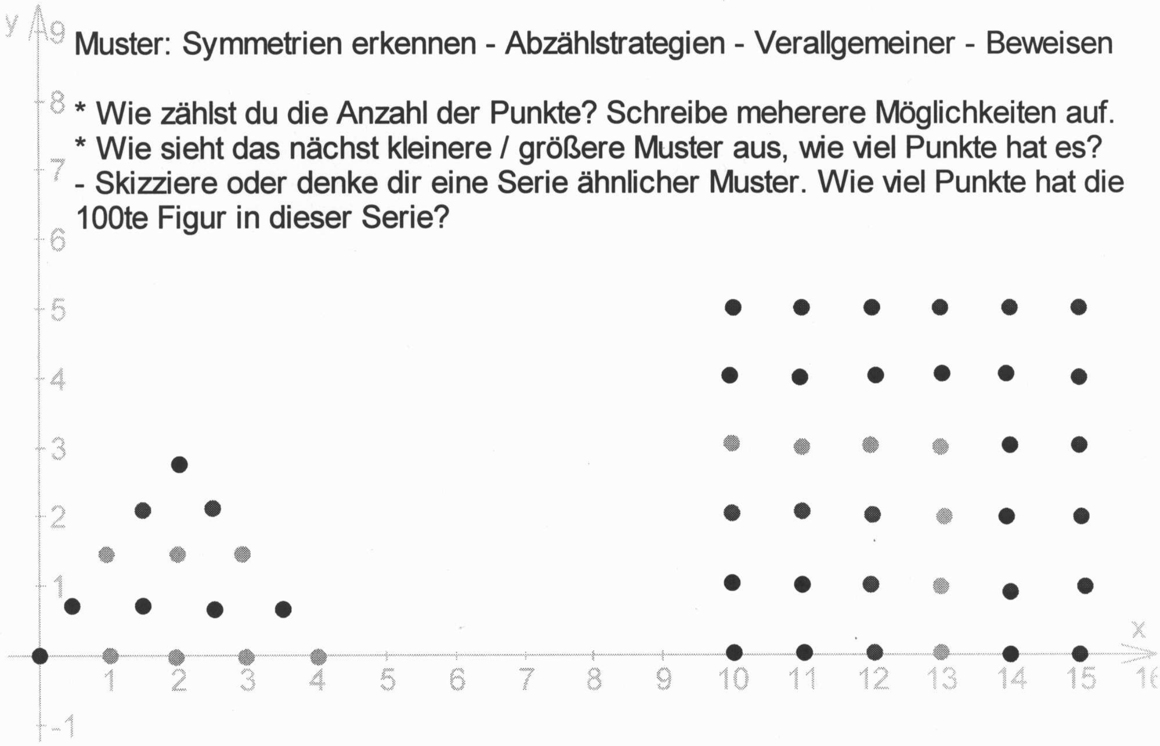
6.2 Reaktionszeit



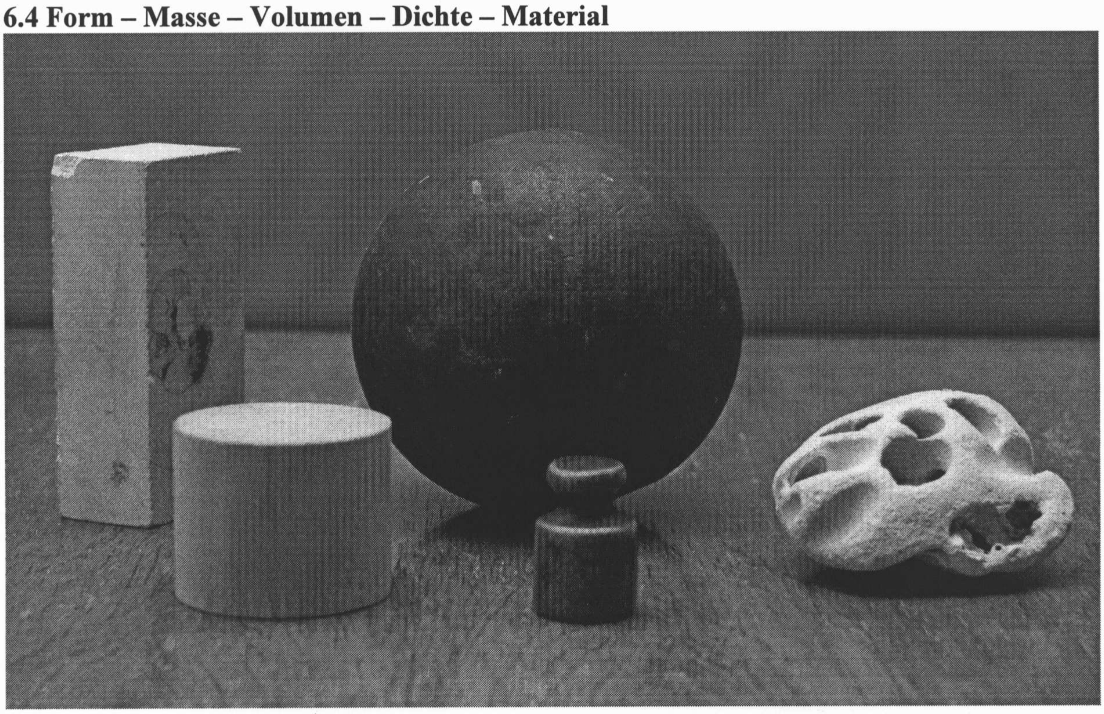
6.3 Punkt - Muster

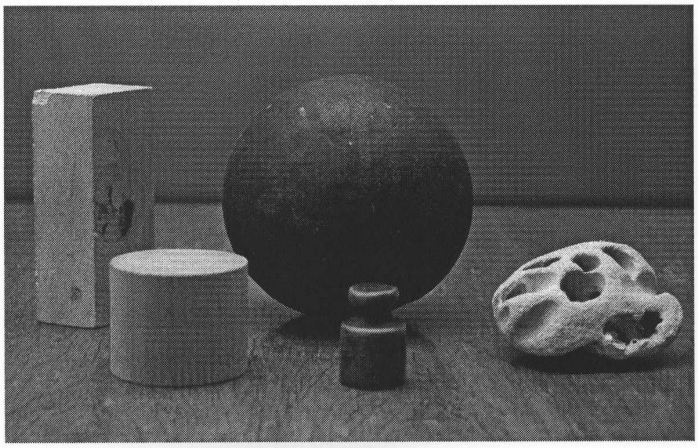
Muster: Symmetrien erkennen - Abzählstrategien - Verallgemeiner - Beweisen

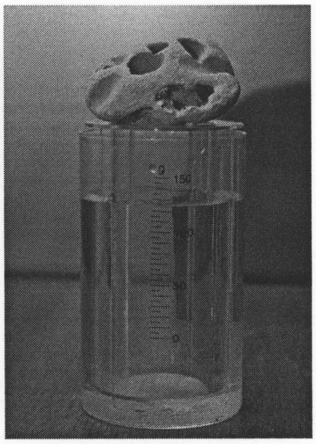
* Wie zählst du die Anzahl der Punkte? Schreibe meherere Möglichkeiten auf.
* Wie sieht das nächst kleinere / größere Muster aus, wie viel Punkte hat es?
- Skizziere oder denke dir eine Serie ähnlicher Muster. Wie viel Punkte hat die 100te Figur in dieser Serie?

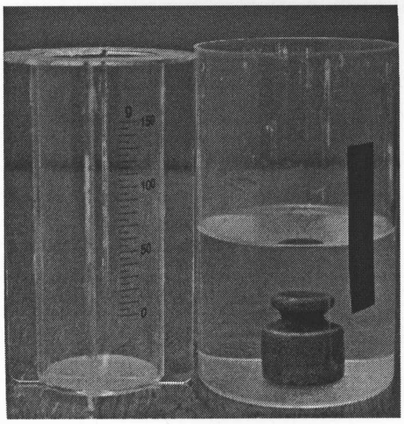


6.4 Form – Masse – Volumen – Dichte – Material





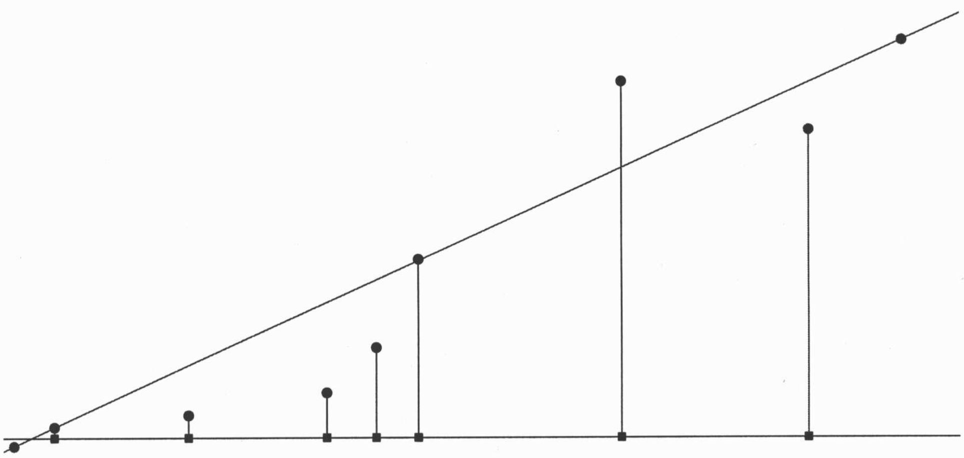




6.5 Zwei-hoch-Stäbe

2^{hoch} bis Expo

Experimentieren mit 2^x - Stäben: Verschiebe die Stäbe so, dass
* die Fußpunkte gleichen Abstand haben
* die Stabenden auf einer "glatten" Kurve liegen, z.B. auf der blauen Geraden
- setze den roten Stab so, dass er in die Reihe der anderen "passt"



mit Euler von $Basis^{winzig} = 1 + k^* winzig$ zu e und e^x

Literatur
Baumert, J., Kunter, M., Brunner, M., Krauss, S., Blum, W., Neubrand, M. (2004). *Mathematikunterricht aus Sicht der PISA-Schülerinnen und –Schüler und ihrer Lehrkräfte.* In: PISA 2003 – Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland. Wachsmann

Baumert, J., Klieme, E., Neubrand, M., Prenzel, M., Schiefele, U., Schneider, W., Stanat, P., Tillmann, K.-J., Weiß, M. (2001). Pisa 2000 – Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Leske + Budrich, Opladen.

Wynands, A., & Neubrand, M.
PISA und mathematische Grundbildung – Impulse für Aufgaben (nicht nur) in der Hauptschule.
In: L. Hefendehl-Hebeker & S. Hußmann (Hrsg.), Mathematikdidaktik zwischen Fach-orientierung und Empirie. Festschrift für Norbert Knoche (S. 299–311). Hildesheim: Franzbecker, 2003.

Wynands, A. & Möller, G.
Leistungsstarke Hauptschülerinnen und -schüler in Mathematik - Vergleich einer Schülergruppe mit leistungsgleichen Gruppen anderer Bildungsgänge in Deutschland
In: M. Neubrand (Hrsg.), Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000. Wiesbaden: VS - Verlag für Sozialwissenschaften 2004

Jordan, Alexander/ Kleine, Michael/ Wynands, Alexander/ Flade, Lothar:
Mathematische Fähigkeiten in der Proportionalität und Prozentrechnung – Analysen und ausgewählte Ergebnisse
In M. Neubrand (Hrsg.), Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000.
Wiesbaden: VS - Verlag für Sozialwissenschaften 2004

Wynands, A. & Möller, G.
High-performing students in the `Hauptschule` - A comparison of different groups of students in secondary education within Germany. Zentralblatt Didaktik der Mathematik (ZDM) Vol. 36 (2) S. 56 - 63, 2005

Wynands, A.
Leistungsstarke Hauptschülerinnen und Hauptschüler - Vergleich einer Schülergruppe mit leistungsgleichen Gruppen anderer Bildungsgänge in Deutschland
Beiträge zum Mathematikunterricht - Franzbecker, 2005

Wynands, A.
Sehen, verstehen und begründen – Muster, Zahlen und Terme
mathematik lehren / Heft 128, S. 47 - 52, 2005

Wynands, A.: *Intelligentes Üben im Mathematikunterricht*, in IQB-Veröffentlichung: Blum, W. e.a. (Hrsg.): Bildungsstandards Mathematik: konkret – Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen; Cornelsen Scriptor, 2006

[AEBLI, 1991]
AEBLI, H.: Zwölf Grundformen des Lehrens: Eine allgemeine Didaktik auf psychologischer Grundlage. Klett-Cotta, Stuttgart ^{6}1991.
[LEUDERS, 2005] INTELLIGENTES ÜBEN SELBST GESTALTEN! IN: PÄDAGOGIK, 11/05, THEMENSEITEN „INTELLIGENTES ÜBEN“
[NEUBRAND, 1997]
Expertise „Steigerung der Effizienz des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterricht“, BLK-Projekt, Arbeitsgruppe … J. Baumert, 1997
[WEINERT, 2000]
(http://pz.bildung-rp.de/pn/pn2_00/weinert.htm)
[WINTER, 1991]
WINTER, H.: Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. 2. verbesserte Auflage, Hg. Ch. Wittmann, Vieweg, Braunschweig 1991.
[WITTMANN, 1982]
WITTMANN, E.C.: Unterrichtsbeispiele als integrierender Kern der Mathematikdidaktik; Journal für Mathematik-Didaktik, (JMD) 1/82, S. 3-20
[WITTMANN / MÜLLER, 1992]
Wittmann, E.C.; Mueller, G.N.:
Handbuch produktiver Rechenübungen. Stuttgart: Klett, Bd.1 1990, Bd. 2 1992.
[WYNANDS / NEUBRAND, 2003]
WYNANDS, A., & e NEUBRAND, M.
PISA und mathematische Grundbildung – Impulse für Aufgaben (nicht nur) in der Hauptschule. In L. Hefendehl-Hebeker & S. Hußmann (Hrsg.), Mathematikdidaktik zwischen Fachorientierung und Empirie. Festschrift für Norbert Knoche (S. 299–311). Hildesheim: Franzbecker, 2003.
[WYNANDS, 2005]
WYNANDS, A.: Sehen, verstehen und begründen – Muster, Zahlen und Terme. In: Mathematik Lehren, Heft 128, 2005, S. 47-51.
[WELT DER ZAHL, 2001-2004] Welt der Zahl: Wynands, A. mit Rinkens, H.D. für Band 5 und Bauhoff, E. ab Band 7 (Hrsg.) - Ausgabe Hauptschule NRW. Bände 5 (2001) bis 10 (2004), Hannover, Schroedel.

Bearbeiten von Aufgabenbeispielen

Leitideen, wie sie in den Bildungsstandards verwendet werden, sind:

- **L1 Zahl** — **L2 Messen**
- **L3 Raum und Form** — **L4 funktionaler Zusammenhang**
- **L5 Daten und Zufall**

Anforderungsbereich I: Reproduzieren

Dieses Niveau umfasst die Wiedergabe und direkte Anwendung von grundlegenden Begriffen, Sätzen und Verfahren in einem abgegrenzten Gebiet und einem wiederholenden Zusammenhang.

Anforderungsbereich II: Zusammenhänge herstellen

Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten bekannter Sachverhalte, indem Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten verknüpft werden, die in der Auseinandersetzung mit Mathematik auf verschiedenen Gebieten erworben wurden.

Anforderungsbereich III: Verallgemeinern und Reflektieren

Dieses Niveau umfasst das Bearbeiten komplexer Gegebenheiten u. a. mit dem Ziel, zu eigenen Problemformulierungen, Lösungen, Begründungen, Folgerungen, Interpretationen oder Wertungen zu gelangen.

Reproduzieren	Zusammenhänge herstellen	Verallgemeinern und Reflektieren
(K1) Mathematisch argumentieren Dazu gehört:		
– Routineargumentationen wiedergeben (wie Rechnungen, Verfahren, Herleitungen, Sätze, die aus dem Unterricht vertraut sind) – mit Alltagswissen argumentieren	– überschaubare mehrschrittige Argumentationen erläutern oder entwickeln – einen Lösungsweg beschreiben und begründen – Ergebnisse … bewerten – Zusammenhänge …erläutern	– komplexe Argumentationen erläutern oder entwickeln – verschiedene Argumentationen bewerten – Fragen stellen …und Vermutungen begründet äußern
(K2) Probleme mathematisch lösen Dazu gehört:		
– Routineaufgaben lösen („sich zu helfen wissen") – einfache Probleme mit bekannten - auch experimen-tellen - Verfahren lösen	– Probleme bearbeiten, deren Lösung die Anwendung von heuristischen Hilfsmitteln, Strategien und Prinzipien erfordert – Probleme selbst formulieren – die Plausibilität von Ergebnissen überprüfen	– anspruchsvolle Probleme bearbeiten – das Finden von Lösungsideen und die Lösungswege reflektieren
(K3) Mathematisch modellieren Dazu gehört:		
– vertraute und direkt erkennbare Modelle nutzen – einfachen Erscheinungen aus der Erfahrungswelt mathematische Objekte zuordnen – Resultate am Kontext prüfen	– Modellierungen, die mehrere Schritte erfordern, vornehmen – Ergebnisse einer Modellierung interpretieren und an der Ausgangssituation prüfen – einem mathematischen Modell passende Situationen zuordnen	– komplexe oder unvertraute Situationen modellieren – verwendete mathematische Modelle (wie Formeln, Gleichungen, Darstellungen von Zuordnungen, Zeichn., Darstellungen…) reflektieren und kritisch beurteilen
(K4) Mathematische Darstellungen verwenden Dazu gehört:		
– vertraute und geübte Darstellungen von mathematischen Objekten und Situationen anfertigen oder nutzen	– Beziehungen zwischen Darstellungsformen erkennen und zwischen den Darstellungsformen wechseln	– eigene Darstellungen entwickeln – verschiedene Formen der Darstellung …beurteilen – nicht vertraute Darstellungen lesen und … beurteilen
(K5) Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen Dazu gehört:		
– Routineverfahren verwenden – mit vertrauten Formeln und Symbolen umgehen – mathematische Werkzeuge (wie Formelsammlungen, Taschenrechner, Software) in Situationen nutzen, in denen ihr Einsatz geübt wurde	– Lösungs- und Kontrollverfahren ausführen – symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache übersetzen und umgekehrt – verschiedene Aspekte des Variablenbegriffes nutzen – mit Variablen, Termen, Gleichungen, …arbeiten – mathematische Werkzeuge verständig auswählen und einsetzen	– Lösungs- und Kontrollverfahren hinsichtlich ihrer Effizienz bewerten – Möglichkeiten und Grenzen der Nutzung mathematischer Werkzeuge reflektieren
(K6) Kommunizieren Dazu gehört:		
– einfache mathematische Sachverhalte mündlich und schriftlich ausdrücken – kurze, sprachlogisch einfache mathematikhaltige Texte sinnentnehmend lesen – auf Fragen und Kritik sachlich und angemessen reagieren	– Überlegungen, Lösungswege bzw. Ergebnisse verständlich darstellen – sprachlogisch komplexe mathematikhaltige Texte sinnentnehmend lesen – die Fachsprache adressatengerecht verwenden – auf Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten eingehen – mit Fehlern konstruktiv umgehen	– komplexe mathematische Sachverhalte mündlich und schriftlich präsentieren – komplexe mathematische Texte sinnentnehmend lesen – Äußerungen von anderen zu mathematischen Inhalten bewerten

Mathematik
Analyseschema für einen Leistungstest gemäß den Anforderungen der Bildungsstandards
(Kompetenzen und Anforderungsbereiche)

Aufgabe	Argumentieren	Probleme lösen	Modellieren	Darstellungen verwenden	Symbolisch/technisch/ formal Arbeiten	Kommunizieren
1a	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
1b	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
1c	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
2	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
2	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
3	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
4a	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
4b	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
4c	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
5a	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
5b	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐
Auswertung	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐	☐ ☐ ☐

Kreuzen Sie - sofern eine allgemeine mathematische Kompetenz *schwerpunktmäßig* zur Bearbeitung einer Teilaufgabe erforderlich ist - an, welchem Anforderungsbereich sie zugehört, d. h. auf welchem Niveau sie zur Bearbeitung benötigt wird. Beziehen Sie sich bei Ihrer Entscheidung auf die in den Bildungsstandards formulierten Beschreibungen der Kompetenzen (vgl. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss, S. 15-17 bzw. Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9, S. 13-15).
Kreuz links: Anforderungsbereich I; Kreuz Mitte: Anforderungsbereich II; Kreuz rechts: Anforderungsbereich III

Beispiel:
Zur Bearbeitung einer Teilaufgabe werden die Kompetenzen Argumentieren (im Anforderungsbereich I) und Modellieren (im Anforderungsbereich II) benötigt, andere Kompetenzen nicht/kaum. Bei *Argumentieren* wird im linken Kästchen ein Kreuz gesetzt, bei *Modellieren* im rechten, sonst keines.